

Teoría de Números. Taller 1

E. Luna

3 de Abril 2018

Sean $a \neq 0$ número real, y x, y números enteros, entonces definimos lo siguiente:

$$\text{i) } a^n = \underbrace{a * \dots * a}_{n\text{-veces}}$$

$$\text{ii) } a^0 = 1$$

$$\text{iii) } a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\text{iv) } a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$$

En base a esta definición, podemos conseguir las siguientes propiedades:

1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$
4. $(ab)^x = a^x b^x$
5. Si $a^x = a^y$ con $a \neq 1$ entonces $x = y$.

Ejemplo 1. • **¿Cuánto es 25^6 entre 5?**

Como $25 = 5^2$ entonces tenemos

$$25^6 = (5^2)^6 = 5^{6*2} = 5^{12}$$

luego $5^{12}/5 = 5^{12-1} = 5^{11}$.

• **¿Cuánto es la suma de las cifras del número $100^3 + 25$**

Como 100^3 solo tiene como cifras un 1 y 0's, entonces la suma de las cifras serian $1 + 0 + 2 + 5 = 8$

• **Si $3^{x+y} = 81$ y $25^{y/2} = 5$, ¿Cuánto vale x ?**

Como $25^{y/2} = 5$ y como $25 = 5^2$ entonces, sustituyendo, $25^{y/2} = (5^2)^{y/2}$ utilizando la propiedad 3. de los exponentes tenemos $5^{2*y/2} = 5^y$ entonces, resulta $5^y = 5$, es decir, $y = 1$, luego, sustituyendo tenemos $3^{x+y} = 3^{x+1} = 81$ y como $81 = 3^4$ entonces $3^{x+1} = 3^4$, es decir, $x + 1 = 4$ lo cual resulta ser $x = 3$.



- ¿Qué número es mayor $2^{2018}5^{2017}$ o $2^{2016}5^{2018}$?

Como de ambos números podemos factorizar 2^{2016} y 5^{2017} entonces solo resta ver si

$$\frac{2^{2018}5^{2017}}{2^{2016}5^{2017}} > \text{ o } < \frac{2^{2016}5^{2018}}{2^{2016}5^{2017}}$$

lo cual resulta

$$2^{2018-2016} = 2^2 > \text{ o } < 5^{2018-2017} = 5$$

es decir, todo queda en comparar si $4 = 2^2$ es mayor o menor que 5, entonces $2^{2016}5^{2018}$ es mayor que $2^{2018}5^{2017}$.

Problemas

Para los siguientes ejercicios, de ser posible, escribe los resultados utilizando notación de exponentes:

1. Escribe $2^5 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}$ como una sola potencia de 2
2. ¿Cuánto es 2^{2017} entre 64?
3. ¿Cuánto es $7^7 + 7^7 + 7^7 + 7^7 + 7^7 + 7^7 + 7^7$?
4. Un pastel se corta quitando cada vez la tercera parte del pastel que hay en el momento de cortar. ¿Qué fracción del pastel original queda después de cortar 3 veces?
5. Sea 1,4,9,16,... la sucesión de los cuadrados de los enteros positivos. ¿El número 10^{10} es un término de esta sucesión?. ¿Cuál es el término de la sucesión que va después de 10^{10} ?
6. ¿Cuántas soluciones enteras tiene la ecuación $2 * 4^n = 2^n * 64$?
7. Encontrar una expresión de y en términos de x de tal forma que $2^y = 16^{x+1} + 2^{4x+4}$
8. Para que valores de x se cumple la ecuación $2^{5+x} + 2^{5-x} = 1025$?
9. ¿Cual de los siguientes 4 números es mayor?
a) $2^{1/2}$ b) $3^{1/3}$ c) $4^{1/4}$ d) $5^{1/5}$
10. ¿Cual de los siguientes números es mas grande?
a) 2^{12} b) 4^{15} c) 8^{11} d) 12^8 e) 32^6
11. Si $4^x - 4^{x-1} = 24$, ¿cuánto vale $(2x)^x$?



12. Reduce la siguiente fracción a su mínima expresión

$$\frac{2^{2018} + 2^{2016}}{2^{2018} - 2^{2016}}$$

13. ¿Cuántas cifras tiene el número $2^{1998} * 5^{2002}$?

14. ¿Cuántas cifras tiene el número $3^2 * 2^{2017} * 5^{2018}$?

15. ¿Que número es mayor $2^{1999} * 3^{2003} * 5^{2001}$ o $2^{2003} * 3^{2001} * 5^{1999}$?

Referencias

Eugenio Daniel Flores Alatorre, "*Diminuto curso de teoría de números*" Ed. Dinosaurio (editorialdinosaurio.blogspot.mx), 2013