Teorema de Tales.

Simbología:

AB || CD	AB es paralela a CD
[ABC]	Área del triángulo ABC

Teorema:

1) (Teorema de Tales 1) Sea ABC un triángulo, sea D un punto en AB, y E un punto en AC. Si $DE \parallel BC$ entonces $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.
    a) La demostración se hará como problema.

Problema (Demostración guiada):

1) Demuestra que si 2 triángulos tienen la misma altura, entonces la razón entre sus áreas es la razón entre sus bases
2) En la figura del Teorema de Tales 1. Demuestra que $\frac{[ADE]}{[BDE]} = \frac{AD}{DB}$
3) Demuestra que $\frac{[AED]}{[CED]} = \frac{AE}{EC}$
4) Demuestra que $[BDE] = [CDE]$
5) Demuestra el teorema de Tales 1.

Ejercicios:

1) Sea ABC un triángulo, sea D un punto en AB, y E un punto en AC. Demuestra que si $DE \parallel BC$ entonces $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.
2) (Teorema de Tales 2) Sean O,P,Q tres puntos en una recta, sean M,N,T tres puntos en otra recta. De forma que OM || PN || QT. Demuestra que $\frac{OP}{PQ} = \frac{MN}{NT}$.

Teorema:

1) (Recíproco del Teorema de Tales 1) Sea ABC un triángulo, sea D un punto en AB, y E un punto en AC. Si $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ entonces DE || BC.
2) (Recíproco del Teorema de Tales 2) Sean O,P,Q tres puntos en una recta, sean M,N,T tres puntos en otra recta. De forma que OM || QT. Si $\frac{OP}{PQ} = \frac{MN}{NT}$ entonces OM || PN || QT. (Cuidado: En este teorema <u>debes tener 2 paralelas</u> para obtener que la tercera es también paralela)

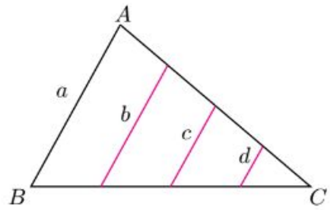
Semejanza

Definición: Que 2 triángulos sean semejantes significa que sus ángulos correspondientes son iguales.

Teoremas:

1) Los lados correspondientes de dos triángulos semejantes son proporcionales
2) (Criterios de Semejanza) Podemos saber que 2 triángulos son semejantes cuando
    - 2 ángulos correspondientes sean iguales (AA)
    - Tienen un ángulo correspondiente igual y los lados que forman ese ángulo son proporcionales (LAL) (Cuidado: El ángulo debe estar entre las rectas, no LLA)
    - Los 3 lados correspondientes son proporcionales. (LLL)

Problema 1.16 *En la siguiente figura los segmentos a, b, c y d son paralelos y dividen al lado BC en 4 segmentos iguales. Si $a = 10$, encuentra la suma $a + b + c + d$.*



- Demuestre que el segmento entre los puntos medios de dos lados de un triángulo mide la mitad de la longitud del tercer lado y es paralelo a ese lado.
- Sean *a* y *b* dos medianas de un triángulo que se intersectan en un punto *p*. Pruebe que *p* divide a *a* en dos segmentos que miden un tercio y dos tercios de lo que mide *a* respectivamente.
- (Teorema de Varignon) (El favorito de Tzoali xD) Demuestra que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero forman un paralelogramo.
  - Demuestra que el perímetro del paralelogramo es igual a la suma de las diagonales
  - Demuestra que el área del paralelogramos es la mitad del área del cuadrilátero

Problema 1.25 *En un triángulo $\triangle ABC$, sobre el lado BC se toma un punto D de tal manera que $\angle BAD = \angle ACB$. Demuestra que $(AB)^2 = BD \cdot BC$.*

- Sea ABC un triángulo rectángulo con $\angle A = 90°$, sea H la altura desde A hasta BC, demuestra que: $BH \cdot HC = AH^2$ y $BH \cdot BC = AC^2$
- Sea ABC un triángulo acutángulo, con alturas AA_1 y BB_1 demuestra que $CB_1 \cdot CA = CA_1 \cdot CB$

Ejemplo 1.4.3 *Sea Z un punto sobre el lado AB de un triángulo $\triangle ABC$. Una línea a través de A paralela a CZ intersecta a BC en X. Una línea a través de B paralela a CZ intersecta a AC en Y. Demuestra que*

$$\frac{1}{CZ} = \frac{1}{AX} + \frac{1}{BY}.$$

Ejercicio 1.10.11 En el triángulo ABC sabemos que el ángulo CBA es el doble del ángulo BCA, el lado CA es 2 unidades mayor que el lado AB y BC mide 5. ¿Cuánto miden AB y CA?

Problema 1.24 *Demuestra que la recta que une los puntos medios de los lados paralelos de un trapecio pasa por el punto de intersección de las diagonales.*

Problema 1.28 *En un trapecio $ABCD$ (AB paralelo a DC) sea $AB = a$ y $DC = b$. Sean M, N, P y Q los puntos medios de AD, BD, AC y BC, respectivamente. Demuestra que*

(a) $MQ = \frac{a+b}{2}$

(b) $NP = \frac{|a-b|}{2}$

Problema 1.29 *En un trapecio $ABCD$ (AB paralelo a DC) sea $AB = a$ y $DC = b$. Supongamos que $\measuredangle ADC + \measuredangle BCD = 90°$. Sean M y N los puntos medios de AB y DC, respectivamente. Demuestra que*

$$MN = \frac{b-a}{2}.$$

Problema 1.17 *Sea $ABCD$ un paralelogramo en el que L y M son puntos medios de AB y CD, respectivamente. Demuestra que los segmentos LC y AM dividen la diagonal BD en tres segmentos iguales.*