Olimpiada Mexicana de MATEMÁTICAS Aguascalientes

Examen de Practica

27 de Abril

Instrucciones:

- El tiempo máximo de duración del examen será de 4 horas.
- Antes de contestar el examen, escriba su nombre en las hojas en donde pondrá sus respuestas
- Deberás escribir cada problema que resuelvas, o intentes, en paginas diferentes.
- Escribe todas las ideas, procedimientos y operaciones que te llevaron a la solución de cada problema.
- En caso de cualquier duda referente al enunciado de alguno de estos problemas, deberás preguntarla por escrito. Tienes la primera hora para hacer preguntas.

Problema 1. Encontrar los números naturales de 3 dígitos que al dividirlos entre 11 obtenemos un numero que es la suma de los dígitos del número original.

Problema 2. Miguel quiere pintar las siete paredes de su cuarto que tiene en forma de heptágono y el techo. Para ello dispone de los colores blanco, gris, amarillo y azul (y no los puede mezclar). Miguel quiere que si dos paredes o el techo son adyacentes, estos queden pintados de diferente color. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

Problema 3. Sea ABC un triángulo, sea L, M y N los puntos medios de BC, CA y AB respectivamente. Sea K el punto tal que M es punto medio de NK. Demuestra que los lados del triángulo ALK miden lo mismo que las medianas del triángulo ABC.

Soluciones

Problema 1

El número de 3 dígitos xyz por hipótesis satisface la siguiente ecuación

$$xyz = 11 \cdot (x + y + z). \tag{1}$$

Como x, y, z son dígitos tenemos que son menores iguales a 9, por lo que su suma $x + y + z \leq 27$. De esto y la igualdad 1 sabemos que $xyz \leq 297$ donde $297 = 11 \cdot 27$. Esto implica que $x \leq 2$.

El criterio de divisibilidad del once nos dice que un número es divisible entre 11 si y sólo si la suma de los dígitos en posición impar menos la suma de los dígitos en posición par es un múltiplo de 11. En nuestro caso $x - y + z$ tiene que ser divisible entre 11. Ya que $x + z \leq 18$, sólo tenemos dos opciones

$$x - y + z = 11 \quad \text{ó} \quad x - y + z = 0.$$

De la primera igualdad se concluye que $x + z \geq 11$ y como $x \leq 2$ la única solución de la primera ecuación con estas caracteristicas es $x = 2, y = 0, z = 9$. Pero $209 = 11 \cdot 19$ y $19 \neq 2 + 0 + 9$.

Entonces si existe el número tiene que satisfacer la segunda igualdad. Por lo que

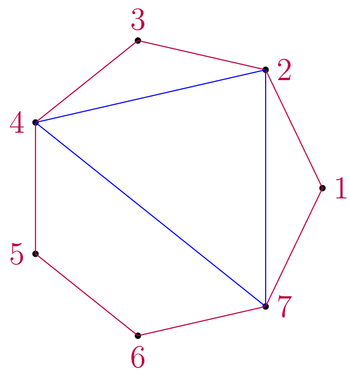
$$\begin{aligned}(x + y + z) \cdot 11 &= 100x + 10y + z\\ 2y \cdot 11 &= 99x + 11y\\ 2y &= 9x + y\\ y &= 9x.\end{aligned}$$

Como y es un dígito y $x \neq 0$ tenemos que x sólo puede ser 1 y así $y = 9, z = 8$.

Y así probamos que el único número que satisface es 198.

Problema 2

Primero notemos que el techo es adyacente a todas las paredes. Esto nos indica que las siete paredes del cuarto en forma de heptágono sólo se pueden pintar con tres colores. Digamos que los colores son A,B y C. Ahora podemos pensar primero de cuantas formas es posible pintar las paredes del cuarto heptagonal con tres colores sin que dos paredes adyacentes tengan el mismo color.

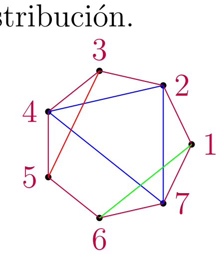


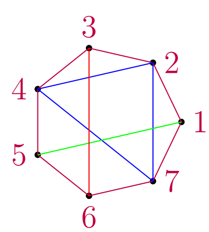
Para esto haremos un esquema del cuarto usando un heptágono regular, donde los vértices representan las paredes. En este caso vértices adyacentes son paredes adyacentes. Recordemos que el cuarto no se puede rotar, así que coloraciones que pueden ser rotación de otra no son iguales entre sí.

Ahora nos interesa la distribución que pueden tener los colores en el cuarto. Para esto recordemos que dos paredes pintadas del mismo color están representadas en vértices no adyacente y pintamos la diagonal entre ellas. Al tener tres paredes del mismo color tenemos tres diagonales que forman un triángulo, como muestra la figura con el triángulo. Observemos que los 4 vértices sobrantes son adyacentes a algún vertice del triágulo. Y esto es para cualquier triángulo cuyos lados sean diagonales. Entonces el máximo de paredes pintadas de un mismo color es 3. Por lo tanto, las distribuciones posibles son sólo dos. La de 3 paredes de un color A, 3 de color B y una pared de color C (3-3-1); la otra distribución es 3 de color A, 2 de color B y 2 de color C (3-2-2).

¿De cuántas maneras podemos elegir estas distribuciones? Viendo la figura arriba los triángulos que contienen al vértice 1 y cuyos lados son diagonales del heptágono son tres: el $\triangle 136, \triangle 146, \triangle 135$. Ya que cada triángulo tiene tres vértices entonces tenemos $7 \times 3/3 = 7$ triángulos cuyos lados son diagonales.

Para la distribución (3-3-1) sucede que al elegir la única pared (vértice) que va de color C determina la distribución de las otras seis paredes. Por ejemplo, si elegimos 1 para pintar con C, entoces los otros dos colores forman los triángulos $\triangle 264$ y $\triangle 375$. Entoces hay sólo 7 maneras de elegir esta distribución.

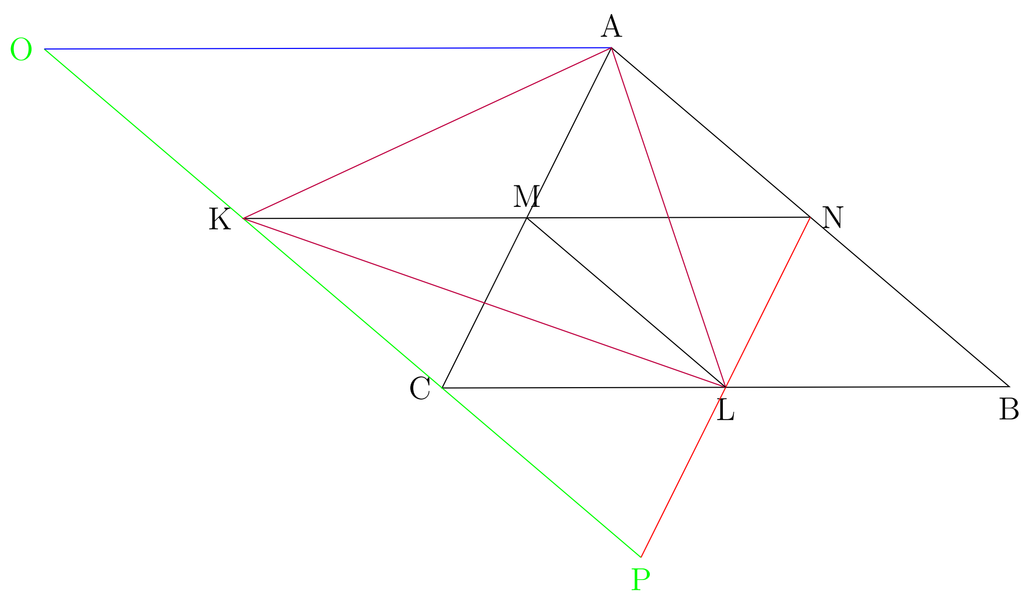




Ya para la distribución (3-2-2) al elegir el triángulo que forman las 3 paredes (vértices) de un mismo color hay dos formas de pintar las otras dos diagonales que unen a las paredes del mismo color. Como muestra la figura anterior. Entonces tenemos 7×2 distribuciones de este tipo. Entonces tenemos $7+7\times 2=21$ distribuciones para pintar.

Usando 3 colores, cada una de estas distribucione se pueden pintar de 3! formas y para elegir los 3 colores tenemos 4 formas. En total tenemos $4\times 3!\times 21=504$ coloraciones posibles para el cuarto.

Problema 3



De la construcción inicial sabemos que AL es una mediana del $\triangle ABC$. Falta ver la correspondencia con KA y KL.

Sobre la recta KC tomamos los puntos O, P tales que $\overline{OK}=\overline{KC}=\overline{CP}$.

Como M, N son puntos medios de AC, AB respectivamente, tenemos que $MN \parallel CB$ y $\overline{KM}=\overline{CB}$. Entonces el cuadrilátero $KNBC$ es un paralelogramo.

El hecho de $KNBC$ ser un paralelogramo implica que $OP \parallel AB$, $\overline{KC}=\overline{NB}$ y $\angle NBC=\angle CKM$. Entonces tenemos que $\overline{KN}=\overline{BC}$, $\angle PKC=\angle ABC$ y $\overline{KP}=\overline{BA}$.

Entonces por el criterio lado-ángulo-lado los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle PKN$ son congruentes. Y la mediana BM de $\triangle ABC$ coincide con la median KL de $\triangle PKN$.

Como $OP \parallel AB$ los angulos $\angle CAB, \angle ACO$ son congruentes. Y por la construcción de O tenemos que $\overline{CO} = \overline{AB}$.

Con esto el criterio lado-ángulo-lado los triángulos $\triangle ABC, \triangle COA$ son congruentes. Lo que implica que la mediana CN de $\triangle ABC$ coincide con l mediana AK de $\triangle COA$.

Y así probamos que los lados del triángulo $\triangle AKL$ coinciden con las medianas de $\triangle ABC$.