Combinatoria. Taller 6

E. Delgado, I. Gómez, A. Ibarra, R. Muñoz, D. Rodríguez

20 de Abril 2018

Relaciones de Recurrencias

Ejemplo 1. En un patio cerrado se coloca una pareja de conejos para ver cuántos descendientes produce en el curso de un año, y se supone que cada mes a partir del segundo mes de su vida, cada pareja de conejos da origen a una nueva.

Fibonacci resuelve el problema calculando el número de parejas mes a mes, y expone sus resultados en forma de tabla. Además de las condiciones expresas en el planteo del problema, supongamos que ningún conejo muere y que la pareja inicial acaba de nacer. Llamemos F_n al número de parejas de conejos existentes al comienzo del mes n. Entonces es claro que $F_1 = 1$ y $F_2 = 1$. En el tercer mes la pareja inicial alcanza su madurez sexual y por lo tanto engendra una nueva pareja, así tenemos $F_3 = 2$. Es claro también que $F_4 = 3$. En el quinto mes, la pareja nacida en el tercer mes está también en condiciones de procrear, por lo cual nacerán dos nuevas parejas, y tendremos $F_5 = 5$. Así podríamos continuar analizando el número de nacimientos mes a mes. Observemos sin embargo que existe una manera muy sencilla de calcular el número de parejas en un mes determinado si se conoce el número de parejas existentes en los dos meses precedentes. En efecto, F_n será igual a F_{n-1} (debido a la suposición de que no hay decesos) más el número de los nuevos nacimientos, que serán F_{n-2} parejas, ya que ésas son las que en el mes n tendrán dos meses o más de edad y podrán procrear. Es decir que para todo $n \geq 2$ se cumplirá la igualdad

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Aplicando esta relación es fácil computar sucesivamente los términos de la sucesión $F_n : F_3 = F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2$, $F_4 = F_2 + F_3 = 1 + 2 = 3$, $F_5 = F_3 + F_4 = 2 + 3 = 5$, $F_6 = F_4 + F_5 = 3 + 5 = 8$, $F_7 = F_5 + F_6 = 5 + 8 = 13$, etc. Los números F_n son llamados números de Fibonacci y tienen muchas propiedades matemáticas y aplicaciones interesantes. En la maturaleza aparecen, por ejemplo, en la disposición de las hojas en los tallos de las plantas, de los folículos en flores como la del girasol, de las escamas de la piña, etc. A una relación como la $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, en la cual el término general de una sucesión se expresa como función de los anteriores, se le llama relación de recurrencia o simplemente recurrencia. Su importancia en Combinatoria se debe a que la mayoría de los problemas de conteo dependen de uno o más parámetros enteros, por lo cual la solución general consiste en una sucesión con esos parámetros como índices, y muchas veces esulta más fácil encontrar una recurrencia entre los términos de esa sucesión que una fórmula explícita para calcularlos. Además el conocimiento de la relación de recurrencia permite no solamente calcular cuántos términos se deseen de la sucesión, sino que muchas veces permite también deducir propiedades de la misma. Es importante observar que una recurrencia, por sí sola, no determina de manera única una sucesión. Por ejemplo $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, con las condiciones iniciales $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$, determina la sucesión de Fibonacci, ya que $F_2 = F_0 + F_1 = 0 + 1 = 1$, $\quad F_3 = F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2$, $\quad F_4 = F_2 + F_3 = 1 + 2 = 3$, y en general cada término queda determinado por los dos anteriores. Pero si ponemos como condiciones iniciales $L_0 = 2$ y $L_1 = 1$, la misma recurrencia $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ determina otra sucesión, a saber la 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18,..., conocida como sucesión de Lucas.

Ejemplo 2. Supongamos que una persona deposita 10,000 pesos en una cuenta bancaria que le proporciona un intéres anual del 11%. Si los intereses se abonan en la misma cuenta, ¿Cuánto dinero habra en la cuenta al cabo de treinta años?

Sea P_n el saldo en pesos de la cuenta una vez transcurridos n años. Como el saldo de la cuenta después de n años es igual al saldo de cuenta transcurridos $n-1$ años más el interés del año n-*ésimo*, la sucesión $\{P_n\}$ satisface la relación de recurrencia

$$P_n = P_{n-1} + 0.11P_{n-1} = 1.11P_{n-1}$$

con la condición inicial $P_0 = 10,000$. Se puede verificar facilmente que

$$P_n = (1.11)^n P_0$$

por lo que

$$P_{30} = (1.11)^{30} P_0 = (1.11)^{30}(10000) = 228,922.97$$

Ejemplo 3. Si se puede correr en dos pistas para ejercitarse, la primera de un kilómetro y la segunda de 2 kilómetros ¿De cuantas formas se pueden correr n kilómetros?

Sea x_n el numero de formas que puede correr k kilómetros, notar que si ya se corrieron $n-1$ kilómetros entonces basta con correr una vuelta a la primera pista, así como si se corrieron $n-2$ kilómetros, basta con dar una vuelta a la segunda pista.

Así x_{n-1} cuenta las formas que se puede correr n kilómetros con la ultima pista usada sea la pista 1 y x_{n-2} cuenta las formas que se puede correr n kilómetros y que la ultima pista usada sea la pista 2. Con esto podemos llegar a la recurrencia:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-1}, x_1 = 1, x_2 = 2$$

La cual es secuencia de Fibonacci.

Problemas

Problema 1. Recuerda que el número de permutaciones de n elementos $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ es $P_n = n!$. Cualquier permutación de estos elemento se puede ver como la permutación de los elementos $a_1, \ldots, a_{n-1}$ y agregar a_n en algún lugar. Determina una relación de recurrencia para el número de permutaciones en un conjunto de n elementos.

Problema 2. Se desea subir una escalera de n escalones, y que sólo se pueden dar pasos sencillos (subiendo un escalón) o dobles (subiendo dos escalones). ¿De cuántas maneras puede subirse la escalera?

Problema 3. Un bit es una cadena de 0's y 1's. Determina una relación de recurrencia para el número de cadenas de n bits que contienen dos ceros consecutivos. ¿Cuáles son las condiciones iniciales? ¿Cuántas cadenas de siete bits contienen dos ceros consecutivos?

Problema 4. Muestra que los números de Fibonacci satisfacen la relación de recurrencia $f_n = 5f_{n-4} + 3f_{n-5}$ para $n = 5, 6, 7, ...$ junto con las condiciones iniciales $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2$ y $f_4 = 3$.

Problema 5. (OJM 2009, Regional, 1o y 2o) Simón escribe una lista de números. El primero es 25, y luego cada número es la suma de los cuadrados de los dígitos del anterior. Por ejemplo, el segundo en la lista es $2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$, y el tercero es $2^2 + 9^2 = 4 + 81 = 85$. ¿Qué número aparece en la posición 2009?

Problema 6. (Canguro 2013) Una sucesión comienza 1, -1, y a partir del tercero, cada término es el producto de los dos que lo preceden. ¿Cuál es la suma de los primeros 2013 términos?

Problema 7. (Canguro 2010) De una sucesión x_n se sabe que $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ y $x_n = x_{n-3} + x_{n-2} - x_{n-1}$ para $n > 3$. ¿Qué número ocupa el lugar 2010 en esta sucesión?

Problema 8. (OJM 2009, Final, 4 o y 5 o) Una sucesión de números reales $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ satisface la relación $(n+2)a_{n+1} = na_n$ para todo entero positivo n. Si $a_1 = 1005$, ¿cuál es el valor de a_{2009} ?