Olimpiada Mexicana de
MATEMÁTICAS
Aguascalientes

# Combinatoria. Taller 3

E. Delgado, I. Gómez, A. Ibarra, R. Muñoz, D. Rodríguez

Marzo 2018

## Permutaciones

**Ejemplo 1.** ¿Cuántas palabras de cuatro letras se pueden formar con las letras de la palabra "mano"?

La primera letra de izquierda a derecha se puede elegir de 4 maneras. Al elegir la primera para la segunda sólo nos quedan 3 letras para elegir, análogo la tercera letra únicamente tiene 2 opciones para elegir y para la última letra ya sólo quedó una letra. Entonces tenemos $4! = 24$ palabras distintas como también lo muestra la lista de abajo, esto son las permutaciones de 4 elementos.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *mano* | *anom* | *noma* | *oman* |
| *mnao* | *amno* | *naom* | *onma* |
| *mnoa* | *aomn* | *nmao* | *oanm* |
| *maon* | *anmo* | *noam* | *omna* |
| *moan* | *aonm* | *nmoa* | *oamn* |
| *mona* | *amon* | *namo* | *onam* |

El total de **permutaciones de $n$ elementos** es

$$n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!.$$

**Ejemplo 2.** ¿Cuántas permutaciones de las letras $ABCDEFGH$ contienen la cadena $ABC$?

Como las letras $ABC$ deben aparecer de manera consecutiva, podemos encontrar la respuesta considerando el número de permutaciones de un conjunto de seis elementos, a saber, el bloque $ABC$ y cada una de las letras restantes $D,E,F,G,H$. Como estos seis elementos pueden aparecer en cualquier orden, hay $6! = 720$ permutaciones de las letras $ABCDEFGH$ que contienen el bloque $ABC$.

**Ejemplo 3.** ¿Cuántas palabras de cuatro letras se pueden formar con las letras de la palabra "lala"?

Tenemos 4 elementos para cuatro lugares, por lo que son las permutaciones de 4 elementos, pero hay elementos que se repiten. Como $l$ que aparece 2 veces y $a$ también aparece 2 veces. Entonces puedo intercambiar las $a$'s sin que se den cuenta eso son las permutaciones de dos elementos 2!, lo mismo con $l$.

$$\begin{matrix} lala & laal & llaa \\ alal & alla & aall \end{matrix}$$

Por lo que tenemos 2!2! permutaciones iguales. Entonces tenemos

$$\frac{4!}{2!2!} = 6$$

palabras distintas.

Dados los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_r$ y números naturales $k_1, k_2, \ldots, k_r$, consideremos las permutaciones de $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_r$ elementos que se pueden formar con los $a_i$ de modo que $a_1$ se repita $k_1$ veces, $a_2$ se repita $k_2$ veces,... y $a_r$ se repita $k_r$ veces. Las **pemutaciones con repetición** de estos $n$ elementos con sus repeticiones $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ son

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}$$

**Ejemplo 4.** A un matemático se le olvidó su contraseña para acceder a su caja fuerte, solo recuerda que su contraseña tiene 10 digitos y está formada por los números {0,1,5,5,6,6,7,7,8,9}, pero no recuerda su orden, ¿Cuantos códigos posibles hay?

Tenemos que calcular el número de permutaciones de los elementos $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 5, a_4 = 6, a_5 = 7, a_6 = 8, a_7 = 9$con las siguientes repeticiones $k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 2, k_4 = 2, k_5 = 2, k_6 = 1, k_7 = 1$ entonces tenemos

$$\frac{10!}{1!1!2!2!2!1!1!} = 453600$$

contraseñas posibles.

## Combinaciones

**Ejemplo 5.** La Liga MX de fútbol tiene 18 equipos y al final del torneo los últimos 4 equipos descienden a segunda división. ¿De cuántas maneras se pueden elegir estos 4 equipos?

El último equipo se puede elegir de 18 maneras. Al elegir el último para el penúltimo sólo nos quedan 17 equipos para elegir, análogo el antepenúltimo equipo únicamente tiene 16 opciones para elegir y para el equipo en el 15o lugar ya sólo quedaron 15 equipos. Entonces tenemos $18 \times 17 \times 16 \times 15 = 18!/14!$ equipos distintos. Esto son los arreglos de 18 elementos de 4 en 4 elementos. Pero no es ningún consuelo si desciendes en el 15o lugar o en el 17o lugar, entonces dado 4 equipos descendidos hay 4! maneras de ser acomodados del lugar 15o al 18o (permutaciones de 4 elementos), entonces para elegir a los 4 equipos que descienden tenemos

$$\frac{18!}{4!14!} = \frac{18 \times 17 \times 16 \times 15}{4!} = 4590$$

Esto son las **combinaciones** de 18 elementos tomados de 4 en 4.

Llamaremos **combinaciones** de $n$ elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tomados de $k$ en $k$ a los subconjuntos de k elementos del conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$. Denotaremos el número de tales combinaciones mediante el símbolo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

.

**Ejemplo 6.** A lo largo de un viaje un tren hace 5 cambios de rumbo (Derecha o Izquierda), si todo viaje termina en una estación ¿Cuántas estaciones hay donde el tren hizo sólo 2 giros a la derecha?

En este ejemplo cada estación está definida por los cambios de rumbo del tren, así podemos identificar a cada estaciones como una palabra de 5 letras formada por 'I' y 'D', así podemos responder la pregunta contando las palabras con 2 'D' y 3 'I' como se puede observar en la siguiente manera:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

## Problemas

**Problema 1.** ¿De cuántas maneras cuatro niñas pueden forman una fila, una detrás de otra? Pero supongamos en cambio que quieren formar una ronda. ¿De cuántas maneras pueden hacerlo?

**Problema 2.** ¿Cuántas permutaciones de las letras $ABCDEFGH$ contienen:

a) la cadena $ED$?

b) la cadena $CDE$?

c) las cadenas $BA$ y $FGH$?

d) las cadenas $AB$, $DE$ y $GH$?

e) las cadenas $CAB$ y $BED$?

f) las cadenas $BCA$ y $ABF$?

**Problema 3.** El matemático del Ejemplo 4 logró recordar algo nuevo, su código contiene a los números '90' y '18', con esta información, ¿Cuántos códigos puede rechazar?

**Problema 4.** ¿De cuántas maneras pueden ponerse en fila un grupo de ocho hombres y cinco mujeres de manera que no haya dos mujeres en posiciones consecutivas?

**Problema 5.** Prueba que $\frac{(2n)!}{2^n}$ es un número natural para todo $n$ natural.

**Problema 6.** A lo largo de un viaje un tren hace 7 cambios de rumbo (Derecha o Izquierda), si todo viaje termina en una estación ¿Cuántas estaciones hay donde el tren hizo sólo 3 giros a la izquierda?

**Problema 7.** Si un niño quiere estudiar 8 horas y jugar otras 8 por día ¿De cuantas formas puede planear su día (si solo puede hacer una actividad cada hora)? ¿De cuantas formas puede planear su fin de semana?

**Problema 8.** ¿De cuantás formas se pueden seleccionar una comisión para diseñar el programa de un curso de matemáticas de una escuela de informática si la comisión debe de estar compuesta por tres miembros del departamento de informática y cuatro miembros del departamento de matemáticas, sabiendo que el departamento de informática tienen nueve miembros y el departamento de matemáticas once?

**Problema 9.** En una fiesta los invitados se saludan al llegar con un apretón de manos, si para el final de la fiesta se realizaron 45 apretones de mano. ¿Cuántas personas asistieron a la fiesta?

**Problema 10.** Un grupo de 15 personas quiere hacer 3 equipos de 5 persona cada uno.¿De cuántas formas se puede hacer la distribución de los equipos?

**Problema 11.** Si se considera el conjunto $A = \{1, 2, 3..., 20\}$ ¿De cuantás formas se pueden elegir cinco elementos entre los que no haya dos consecutivos?

**Problema 12.** Hay 20 personas sentadas en una mesa redonda, y queremos elegir cinco de ellas de forma de que no haya dos en lugares vecinos. ¿De cuantás formas podemos hacerlo?

**Problema 13.** (OJM 2013, Final, 1o y 2o) Determine la cantidad de números enteros positivos menores que 1000, que cumplen las dos condiciones siguientes:

a) El número es múltiplo de 3.

b) La suma de sus dígitos es divisible entre 7.

**Problema 14.** (OJM 2013 Final, 4o y 5o) Una pulga se halla en el suelo, al pie de una escalera de 30 escalones. La pulga sólo puede dar saltos de 3 escalones hacia arriba o de 4 escalones hacia abajo. ¿De cuántas maneras puede subir hasta el escalón 22 en el menor número posible de saltos?

## Referencias

J. H. Nieto Said, **Combinatoria para Olimpiadas Matemáticas**, Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, Caracas, Mayo 2014

Ma. Luisa Pérez Segui, **Combinatoria**, Instituto de Matemáticas, UNAM. Cuadernos de olimpiadas. 2000.

N. VILENKIN, **¿De cuantas formas? Combinatoria**. Libro de la editorial MIR, Moscú, 1972.Ed. en español, traducción por Juan José Tolosa.