Olimpiada Mexicana de MATEMÁTICAS Aguascalientes

Combinatoria. Taller 2

E. Delgado, I. Gómez, A. Ibarra, R. Muñoz, D. Rodríguez

Marzo 2018

Arreglos

En este material presentaremos el concepto de *Arreglos*. El cual ilustraremos mediante ejemplos y problemas.

Definiciónes y ejemplos

Ejemplo 1. ¿De cuantas maneras pueden sentarse 10 personas en un autobus si hay 4 asientos disponibles?

Nótese que el orden en que las personas se sientan sí importa, pues los asientos son distintos y los podemos numerar del 1 al 4. Además una persona no puede ocupar dos asientos a la vez. Entonces para el asiento número 1 se puede elegir de 10 personas una para que se siente. Para el asiento 2 ahora sólo puedo elegir de 9 personas. Así tenemos que para el asiento 3 tenemos 8 personas para elegir y para el asiento 4 tenemos 7. Por lo tanto tenemos

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = \frac{10!}{6!} = 5040$$

distintas maneras para que los 10 pasejeros se sienten.

Definición 1. Se llaman arreglos de n objetos tomados de k en k a las sucesiones de k términos diferentes que pueden formarse con los n objetos. Por ejemplo los arreglos de las letras a, b y c tomadas de dos en dos son:

$$ab \quad ac \quad ba \quad bc \quad ca \quad cb.$$

Si $A = a_1, \ldots, a_n$ entonces el número de arreglos de los elementos de A tomados de k en k es

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Ejemplo 2. ¿De cuántas maneras hay para seleccionar un primer, segundo premio y tercer lugar de 100 personas diferentes que han participado en un concurso?

Como importa qué persona gana qué lugar, el número de formas de elegir los tres ganadores es el número de arreglos de 100 elementos tomados de 3 en 3. Así, la respuesta es

$$100 \cdot 99 \cdot 98 = \frac{100!}{97!} = 970200$$

Ejemplo 3. Las placas de un coche se conforma de 3 letras a la izquierda y de 4 números a la derecha. ¿Cuántas placas distintas hay?(Nota: Consideramos el alfabeto de 27 letras castellanas)

Cada una de las 3 letras puede ser elegida de 27 maneras distintas. Y cada número puede ser elegido de 10 maneras diferenetes, entonces tenemos

$$27 \times 27 \times 27 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 196830000$$

maneras de elegir una placa de coche.

Definición 2. Se llaman *arreglos con repetición* de n elementos tomados de k en k a las sucesiones de k términos que pueden formarse con los n elementos, entendiendo que cada uno de ellos puede aparecer repetido. Por ejemplo los arreglos con repetición las letras a, b y c tomados de dos en dos son:

$$aa \quad ab \quad ac \quad ba \quad bb \quad bc \quad ca \quad cb \quad cc$$

El número de arreglos con repetición de n elementos tomados de k en k es n^k.

Ejemplo 4. ¿Cuantas palabras de 11 letras puedo formar con las letras de la palabra "MISSISSIPPI" que no sea "MISSISSIPPI"?(El arreglo MMMMIIIPPPS se considera palabra)

La palabra "MISSISSIPPI" solo tiene 4 letras diferentes {M,I,S,P} con esto en mente, podemos calcular el numero total de arreglos con repetición como 4^{11}. Pero necesitamos remover la palabra indeseada de nuestra lista así:

$$N = 4^{11} - 1$$

Problemas

Problema 1. Un club tiene 25 miembros. ¿Cuántas formas hay para elegir un presidente, vicepresidente, secretario y tesorero del club?

Problema 2. Pamela tiene 15 libros diferentes. ¿De cuántas maneras puede colocar sus libros en dos estantes para que haya al menos un libro en cada estante? (Tenga en cuenta que los libros se ordenan uno al lado del otro, empezando de izquierda a derecha).

Problema 3. Hay cuatro libros de matemáticas, seis de física y dos de química. Estos libros han de ser colocados en una estantería. ¿Cuántas colocaciones distintas admiten si:

1. Los libros de cada materia han de estar juntos;

2. Sólo los de matemáticas tienen que estar juntos?

Problema 4. Un alumno tiene que elegir 7 de las 10 preguntas de un exámen. ¿De cuántas maneras puede elegirlas? ¿Y si las primeras 4 son obligatorias?

Problema 5. ¿Cuántos arreglos de las letras a,e,i,o,u de tamaño 10 terminan con la misma letra que empiezan?

Problema 6. Una maquina recibe 3 tipos de instrucciones para regar plantas en una columna estas son ”subir”, ”bajar” y ”regar” ¿Cuantas cadenas de instrucciones de tamaño 5 se le pueden dar a la maquina donde no se riegue dos veces seguidas?

Problema 7. ¿Cuántos subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tienen un número impar de elementos?

Problema 8. (Olimpiada Balcánica 1997) Sea S un conjunto con n elementos y sean $A_1, A_2, \ldots, A_k$ subconjuntos de S tales que, dados dos elementos cualesquiera de S, existe algún A_i que contiene a uno de ellos pero no al otro. Pruebe que $n \leq 2^k$.

Problema 9. (OJM Regional 2009, 4o y 5o) Considere todos los números posibles de 8 cifras diferentes no nulas (como, por ejemplo, 73451962).

- (a) ¿Cuántos de ellos son divisibles entre 5?

- (b) ¿Cuántos de ellos son divisibles entre 9?

Problema 10. ¿Cuántos triángulos se pueden formar que tengan como vértices los vértices de un decágono regular?

Problema 11. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados? (Nota: una diagonal es un segmento que une dos vértices diferentes y no consecutivos del polígono.)

Problema 12. (OJM 2013, Regional, 1o y 2o) Un número es capicúa si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Por ejemplo 7, 33 y 252 son capicúas. ¿Cuántos capicúas hay desde 1 hasta 2013?

Problema 13. ¿Cuántos enteros positivos de 3 dígitos no son divisores de 2013?

Referencias

J. H. Nieto Said, **Combinatoria para Olimpiadas Matemáticas**, Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, Caracas, Mayo 2014

Ma. Luisa Pérez Segui, **Combinatoria**, Instituto de Matemáticas, UNAM. Cuadernos de olimpiadas. 2000.

N. VILENKIN, **¿De cuantas formas? Combinatoria**. Libro de la editorial MIR, Moscú, 1972.Ed. en español, traducción por Juan José Tolosa.